**Επιστημονικός Υπολογισμός – Άνοιξη 2009**

QUIZ 2: ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

Επώνυμο **ΔΕΛΗΓΙΑΝΝΗ**  Όνομα **ΙΣΑΒΕΛΛΑ**  Εξάμηνο: **4ο**

13 Μαρτίου 2009

1. Ποια είναι η μορφή ενός πολυωνύμου n βαθμού;

**y = pn(x) = cnxn + cn-1xn-1+…+ c1x1+c0**

2. Υπάρχουν άλλες ισοδύναμες μορφές του ιδίου πολυωνύμου;

**Ναι. Προκύπτουν με τη μέθοδο παραγοντοποίησης πολυωνύμου από τις n ρίζες και με τη μέθοδο Horner για φωλιασμένους πολλαπλασιασμούς πολυωνύμων**

3. Τι λέει το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας;

**Κάθε πολυώνυμο nοστού βαθμού έχει ακριβώς n ρίζες οι οποίες μπορεί να είναι μιγαδικές και πολλαπλές**

4. Σε τι αναφέρεται ο κανόνας του Horner;

**Στην εύρεση του πηλίκου και του υπολοίπου της διαίρεσης ενός πολυωνύμου pn(x) με ένα πολυώνυμο της μορφής x-ρ**

5. Πως παρίστανται πολυώνυμα στην MatLab;

**Τα πολυώνυμα στη Matlab αναπαρίστανται από το διάνυσμα των συντελεστών τους.**

6. Αναπτύξτε το αλγόριθμο του Horner στην MatLab και συγκρίνετε τον με την συνάρτηση polyval.

% implementation of the Horner algorithm for nested multiplication:

function [y] = HornerMultiplication(p,x)

[n,m] = size(x);

y = p(1)\*ones(n,m);

for k = 2:length(p)

y = y.\*x + p(k);

end

y1 = HornerMultiplication(p1,2.5)

y = HornerMultiplication(p2,x)

* **polyval:** υπολογίζει τα πολυώνυμα σε ένα δεδομένο σημείο

y1 = polyval(p1,2.5)

x = [ 0 : 0.2 : 1]; y = polyval(p2,x)

y1 = 18.5625

y = 5.0000 7.0272 9.6432 13.1072 17.7552 24.0000

**Οπως καταλαβαίνουμε από παραπάνω ο αλγόριθμος Horner και η συνάρτηση polyval δίνουν τα ίδια αποτελέσματα**

7. Τι υπολογίζουν οι συναρτήσεις polyder, polyint, conv, deconv, residue, polyfit;

polyder**: υπολογίζει τους συντελεστές της παραγώγου ενός δεδομένου πολυωνύμου**

% P(x) = c(1) x^n + c(2) x^(n-1) + … + c(n) x + c(n+1)

% P'(x) = n c(1) x^(n-1) + (n-1) c(2) x^(n-2) + … + c(n)

Pder1 = polyder(p1), Pder2 = polyder(p2)

Pder1 = 4 6 -14 -8

Pder2 = 8 9 10

polyint**: υπολογίζει τους συντελεστές του ολοκληρώματος ενός δεδομένου πολυωνύμου**

% P(x) = c(1) x^n + c(2) x^(n-1) + … + c(n) x + c(n+1)

% P'(x) = c(1) x^(n+1)/(n+1) + c(2) x^n/n + … + c(n) x^2/2 + c(n+1) x + c(n+2)

% c(n+2) are constant of integration (to be defined)

Pint1 = polyint(p1,10) % the constant of integration is 10

Pint2 = polyint(p2) % the constant of integration is 0 (default)

Pint1 = 0.2000 0.5000 -2.3333 -4.0000 12.0000 10.0000

Pint2 = 0.4000 0.7500 1.6667 4.5000 5.0000 0

conv**: Υπολογίζει το γινόμενο δύο πολυωνύμων**

% Εστω p1 πολυώνυμο βαθμού n και p2 πολυώνυμο βαθμού m,τότε:

% conv(p1,p2) είναι πολυώνυμο βαθμού m+n

p = conv(p1,p2)

p = 2 7 -3 -18 -12 -57 -47 68 60

deconv**: Υπολογίζει τη διαίρεση δύο πολυωνύμων**

% Let p1 be polynomial of order n, p2 be polynomial of order m,

% [pq,pr] = deconv(p1,p2) computes the quotient polynomial pq of order (n-m)

% and the remainder polynomial pr of order (m-1) such that p1 = p2\*pq + pr

[pq,pr] = deconv(p1,p2)

pq = 0.5000

pr = 0 0.5000 -9.5000 -12.5000 9.5000

residue**: υπολογίζει το ανάπτυγμα μερικών κλασμάτων (υπόλοιπα)**

% Let p1 be polynomial of order n and p2 be polynomial of order m

% [C,X,R] = residue(p1,p2) finds coefficients C of the residue terms,

% locations of poles X and the remainder term of a partial fraction expansion

% of the ratio of two polynomials p1(x)/p2(x).

% Example: no multiple roots,

% p1(x) C(1) C(2) C(n)

% ---- = -------- + -------- + ... + -------- + R(x)

% p2(x) x - X(1) x - X(2) x - X(n)

[C,X,R] = residue(p2,p1)

C = -5.2000

1.2500

4.9500

-2.0000

X = -3.0000

-2.0000

2.0000

1.0000

R = 2

% the inverse operation:

% from partial fraction expansion to the ratio of two polynomials

[q1,q2] = residue(C,X,R)

q1 = 2.0000 3.0000 5.0000 9.0000 5.0000

q2 = 1.0000 2.0000 -7.0000 -8.0000 12.0000

8. Υπάρχει πολυώνυμο που διέρχεται από n+1 σημεία; Αν υπάρχει, ποιος είναι ο βαθμός του; Πως αναφέρεται αυτό το πολυώνυμο;

**Υπάρχει. Ο βαθμός ενός πολυωνύμου που διέρχεται από n+1 σημεία είναι n-οστού βαθμού. Έστω x1,x2,…,xn,xn+1  τα n+1 σημεία, με x1<x2<…<xn<xn+1. Το πολυώνυμο που διέρχεται από αυτά ονομάζεται πολυώνυμο παρεμβολής για τα x1 < x < xn+1 και πολυώνυμο παρεκβολής για τα x<x1 και x>xn+1**

9. Πως υπολογίζονται οι συντελεστές αυτού του πολυωνύμου; Υπάρχει ένας τρόπος;

Οι συντελεστές αυτού του πολυωνύμου υπάρχουν και μπορούν να υπολογιστούν με 4 διαφορετικούς τρόπους:

* Δυναμοσειρές ( παρεμβολή Vandermonde)
* Πολυώνυμα παρεμβολή Lagrange
* Παρεμβολή διαφοράς προς τα εμπρός του Newton
* Παρεμβολή διαφοράς προς τα πίσω του Newton

**πχ**

Ενας τροπος υπολογισμου είναι με την παρεμβολη Vandermonde

Οι ***(n+1)*** συντελεστές ***ck*** του πολυωνύμου παρεμβολής ***y = Pn(x)*** πρέπει να αντιστοιχούν σε ***(n+1)*** σημεία

δεδομένων:

***Pn(xk) = yk.***

Οι αντίστοιχες συνθήκες παράγουν ένα σύστημα με ***(n+1)*** γραμμικών εξισώσεων για ***(n+1)*** άγνωστους συντελεστές

του πολυωνύμου παρεμβολής:

***c1 (xk)n + c2 (xk)n-1 + … + cn-1 (xk)2 + cn xk + cn+1 = yk***

10. Ποια η χρησιμότητα του πολυωνύμου παρεμβολής;

**Αντικαθιστούμε πολύπλοκες συναρτήσεις με πολυώνυμα ετσι επιτυγχάνουμε εύκολο και γρήγορο υπολογισμό παραγώγων και ολοκληρωμάτων καθώς και σχεδιασμός ομαλής καμπύλης μεταξύ των δεδομένων**

11. Πως μπορούμε να προσδιορίσουμε το σφάλμα στην προσέγγιση παρεμβολής;

**Μπορούμε να προσδιορίσουμε το σφάλμα στην προσέγγιση παρεμβολής με τον εξής τυπο:**

**F(x)-P(x)=fn+1(ξ)/(n+1)!Πi=0n (x-xi)**

12. Πως συμπεριφέρεται το σφάλμα όταν ο βαθμός του πολυωνύμου μεγαλώνει, θεωρητικά και υπολογιστικά;

**Το σφάλμα της παρεμβολής είναι μεγάλο για μεγάλου βαθμού πολυώνυμα**

13. Για δεδομένο πλαφόν σφάλματος, μπορούμε να βρούμε το βαθμό πολυωνύμου παρεμβολής που ικανοποιεί το επιτρεπτό σφάλμα;

14. Παίζει ρόλο η θέση των σημείων παρεμβολής στο μέγεθος του σφάλματος;

**Ναι, η θέση των σημείων παρεμβολής παίζει ρόλο στο μέγεθος του σφάλματος αφού υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της διαφοράς τους σε όλο το διάστημα των σημείων παρεμβολής.**

15. Αν τα δεδομένα που παρεμβάλουμε προέρχονται από τον υπολογισμό ενός πολυωνύμου, τότε τι μορφή έχει το πολυώνυμο παρεμβολής; Γιατί;

16. Πώς αξιολογούμε ότι η υλοποίηση μιας μεθόδου παρεμβολής είναι σωστή;

17. Έχει έννοια να προσεγγίζουμε δεδομένα με μεγάλου βαθμού πολυώνυμα; Γιατί; Δώστε matlab παραδείγματα για να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

18. Η επιλογή μιας μεθόδου παρεμβολής από τι εξαρτάται;

19. **Τι εννοούμε με τον όρο πολυπλοκότητα μιας μεθόδου**; Δώστε την πολυπλοκότητα των μεθόδων παρεμβολής που έχουν αναφερθεί στο μάθημα.

20. Πως μπορούμε να επεκτείνουμε τις μέθοδοι παρεμβολής σε πολλές διαστάσεις; Αναφερθείτε σε δεδομένα 3-διαστάσεων.

**Διαγώνισμα πολλαπλών απαντήσεων**

1. Ο αριθμός των πολυωνύμων που μπορεί να περάσει από 2 δεδομένα σημεία είναι
   * 1. 0
     2. 1
     3. 2
     4. Άπειρος

**Αφού δεν προσδιορίζεται ο βαθμός του πολυωνύμου**

1. Μοναδικό πολυώνυμο βαθμού \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ διέρχεται από *n+1* σημεία.
   * 1. n+1
     2. n+1 η μικρότερο
     3. n
     4. n η μικρότερο
2. Οι παρακάτω συναρτήσεις χρησιμοποιούνται για παρεμβολή
   * 1. πολυώνυμα (polynomial)
     2. εκθετικές (exponential)
     3. τριγωνομετρικές (trigonometric)
     4. όλες οι παραπάνω
3. Πολυώνυμα είναι οι ποιο συχνά χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις γιατί είναι εύκολες να
   * 1. υπολογιστούν (evaluate)
     2. παραγωγηθούν (differentiate)
     3. ολοκληρωθούν (integrate)
     4. όλοι οι παραπάνω λόγοι
4. Αν ένα πολυώνυμο βαθμού *n* έχει *n+1* ρίζες, τότε το πολυώνυμο είναι
   1. περιοδικό (oscillatory)
   2. μηδέν παντού
   3. παραβολικό (quadratic)
   4. δεν ορίζεται.
5. Δίδονται τα παρακάτω x-y δεδομένα.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *x* | 15 | 18 | 22 |
| *y* | 24 | 37 | 25 |

Το πολυώνυμο παρεμβολής στην μορφή Newton δίδεται από την παράσταση



Η τιμή του συντελεστή είναι ποιο κοντά

1. –1.048
2. 0.1433
3. 4.333
4. 24.00
5. Το πολυώνυμο που διέρχεται από τα δεδομένα x-y

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | 18 | 22 | 24 |
| y | ? 24 | 25 | 123 |

δίδεται από την παράσταση



Το αντίστοιχο πολυώνυμο στην μορφή Newton δίδεται από



Η τιμή του  είναι

1. 0.2500
2. 8.125
3. 24.00
4. δεν μπορεί να προσδιορισθεί για τις πληροφορίες που έχουν δοθεί
5. Η ταχύτητα σαν συνάρτηση του χρόνου προσεγγίζεται από το πολυώνυμο



Η ταχύτητα στο  είναι

1. 
2. 
3. 
4. δεν μπορεί να υπολογισθεί
5. Ένα ρομπότ ακολουθεί μια διαδρομή στο x-y επίπεδο που ορίζεται από το πολυώνυμο παρεμβολής των τεσσάρων σημείων

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 2 | 4.5 | 5.5 | 7 |
| y | 7.5 | 7.5 | 6 | 5 |



Το μήκος της διαδρομής από *x=2* έως *x=7* είναι

1. 
2. 
3. 
4. 
5. Τα παρακάτω δεδομένα προέρχονται από τον υπολογισμό της ταχύτητας ενός σώματος σαν συνάρτηση του χρόνου

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Time (s)** | 0 | 15 | 18 | 22 | 24 |
| **Velocity(m/s)** | 22 | 24 | 37 | 25 | 123 |

Αν πρόκειται να χρησιμοποιήσετε ένα παραβολικό πολυώνυμο για να βρείτε την ταχύτητα στο χρόνο t=14.9 seconds, ποια τρία σημεία θα χρησιμοποιήσετε

1. 0, 15, 18
2. 15, 18, 22
3. 0, 15, 22
4. 0, 18, 24.
5. Δοθέντων δύο σημείων , το γραμμικό πολυώνυμο Lagrange  που περνάει από τα δύο σημεία είναι
   1. 
   2. 
   3. 
   4. 
6. Το Lagrange πολυώνυμο που διέρχεται από τα παρακάτω *3* σημεία

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | 15 | 18 | 22 |
| y | 24 | 37 | 25 |

δίδεται από τον τύπο 

Η τιμή της  στο *x=16* είναι

1. –0.07143
2. 0.5000
3. 0.57143
4. 4.333
5. Τα παρακάτω δεδομένα παριστούν την ταχύτητα ενός σώματος σαν συνάρτηση του χρόνου.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Time (s) | 10 | 15 | 18 | 22 | 24 |
| Velocity (m/s) | 22 | 24 | 37 | 25 | 123 |

Θεωρούμε το παραβολικό πολυώνυμο παρεμβολής στην μορφή Lagrange προσδιορίζεται από τα σημεία, t=15, 18 and 22. Από αυτήν την πληροφορία υπολογίστε το χρόνο που η ταχύτητα του σώματος θα φθάσει σε 26 m/s στο διάστημα *t=15* to *t=22* seconds.

1. 20.173s
2. 20.846s
3. 21.667s
4. 22.020s
5. Δοθέντων των σημείων *(1,6), (3,28), (10, 231)*, μπορεί να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση *y=2x2+3x+1* περνάει και από τα 3 σημεία. Η εκτίμηση σας για την τιμή του *y* στο *x=2* είναι κοντά στο
   * 1. 6
     2. 15
     3. 17
     4. 28
6. Δοθέντος του πίνακα τιμών για την ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Time (s)** | 0 | 15 | 18 | 22 | 24 |
| **Velocity(m/s)** | 22 | 24 | 37 | 25 | 123 |

Η ταχύτητα στο χρόνο 16s χρησιμοποιώντας γραμμικό πολυώνυμο παρεμβολής είναι

* 1. 27.867 m/s.
  2. 28.333 m/s.
  3. 30.429 m/s
  4. 43.000 m/s

1. Δοθέντος του πίνακα τιμών για την ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Time (s)** | 0 | 15 | 18 | 22 | 24 |
| **Velocity(m/s)** | 22 | 24 | 37 | 25 | 123 |

Η ταχύτητα στο χρόνο 16s χρησιμοποιώντας παραβολικό πολυώνυμο παρεμβολής είναι

1. 27.867 m/s.
2. 28.333 m/s.
3. 30.429 m/s
4. 43.000 m/s